ЛЕКЦИЯ № 21

Действие, как функция координат и времени.

Кроме подходов Ньютона, Лагранжа и Гамильтона, существуют и другие формулировки механики. Выбор тех или иных подходов связан с удобством решения различных задач. Один из подходов связан с так называемым уравнением Гамильтона – Якоби. Но для формулировки этого метода необходимо вначале ввести в рассмотрение возможность зависимости действия от координат и времени.

До сих пор мы рассматривали действие, как определенный интеграл от функции Лагранжа $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$, т.е. как *число* (с определенной размерностью). При варьировании действия фиксировались координаты (но не скорости) в начальный и конечный моменты премени (Рис.21.1).

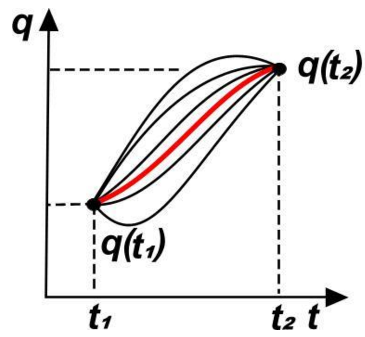

Рис.21.1

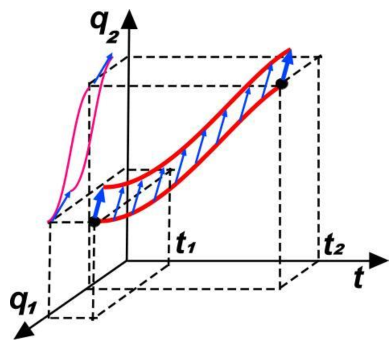

Рис.21.2

С другой стороны, при изучении теоремы Э.Нетер мы рассмотрели вариацию действия при наличии симметрии, когда функция Лагранжа не менялась при однопараметрическом изменении координат. Но при этом изменялись начальные и конечныне положения системы (Рис.21.2). При этом неизменность вариаций в начальный и конечный моменты давала выражение для соответствующего интеграла движения. Само движение по траектории считалось определяемым уравнениями Лагранжа.

Сейчас мы рассмотрим другой тип вариации движения системы. Пусть координата в начальный момент времени будет фиксирована, но мы возьмем два различных значения координаты в конечный момент времени t_2: $q(t_2)$ и $q'(t_2)$(Рис.21.3). Для каждого из этих значений проведем вариацию действия, найдем истинные траектории (красные на рисунке), которые являются решениями уравнения Лагранжа, и значения действия для этих истинных траекторий. Найдем разность этих значений при малом различии $q(t_2)$ и $q'(t_2)$. Как было показано в Лекции №3, оно равно

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt\,. \qquad (21.1)$$

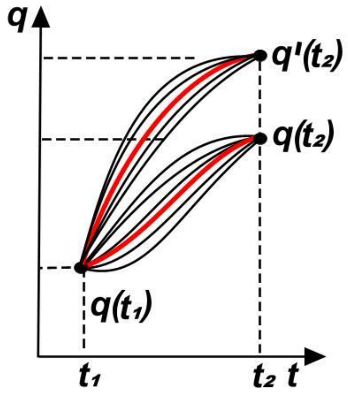

Рис.21.3

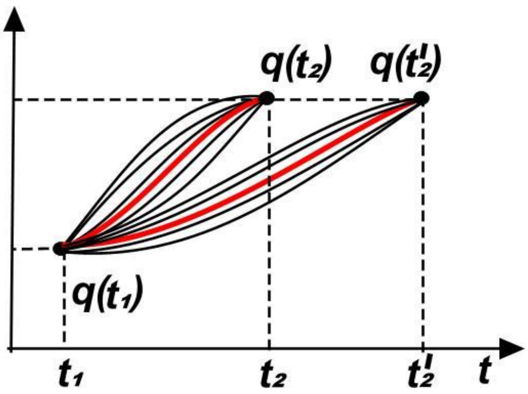

Рис.21.4

Ранее, при фиксированной вариации координаты в момент времени t_2, занулялось первое слагаемое, и из требования $\delta S = 0$ занулялось подинтегральное выражение, что давало нам уравнение Лагранжа. Теперь мы имеем дело с истинными траекториями, для которых подинтегральное выражение равно нулю, но первое слагаемое теперь отлично от нуля и дает приращение действия

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q(t_2) = p\,\delta q\,, \qquad (21.2)$$

или, в случае нескольких степеней свободы

$$\delta S = \sum p_i \delta q_i\,. \qquad (21.3)$$

Т.е. дествие становится функцией координат $S = S(q_i)$, и частные производные по координатам от этой функции равны соответствующим импульсам:

$$\frac{\partial S}{\delta q_i} = p_i\,. \qquad (21.4)$$

Можно поставить задачу по-другому, и, фиксируя начальные условия, рассматривать систему, принимающую в конце процесса одинаковую координату, но в разные моменты времени (Рис.21.3). Опять, при варьировании будем выбирать истинные движения для двух процессов.

Действие становится функцией времени в конце движения. Эту зависимость легко получить из следующих соображений. Поскольку $S=\int Ldt$, то

$$\frac{dS}{dt}=L\,. \tag{21.5}$$

Поскольку действие становится функцией координат и времени, то полная производная по времени равна

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum p_i\dot{q}_i=L\,. \tag{21.6}$$

Но, поскольку по определению энергия равна $E=\sum p_i\dot{q}_i-L$, то получаем окончательно

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H\left(p,q,t\right). \tag{21.7}$$

Два соотношения (21.4) и (21.7) можно записать в виде:

$$dS=\sum p_i dq_i-H\left(p,q,t\right)dt\,, \tag{21.8}$$

или в виде

$$S=\int\left(\sum p_i dq_i-Hdt\right). \tag{21.9}$$

Мы не пишем индексов у координат и времени, подразумевая их значения в конце процесса. Но можно варьировать и начальные значения координат и времени. Тогда обобщение формулы (21.8) будет иметь вид

$$dS=\sum p_i^{(2)}dq_i^{(2)}-H^{(2)}dt^{(2)}-\sum p_i^{(1)}dq_i^{(1)}+H^{(1)}dt^{(1)}\,. \tag{21.10}$$

Вернемся к уравнениям (21.4;21.7). Из этой системы $2s+1$ уравнения можно исключить импульсы, подставив выражения (21.4) для них в гамильтониан в уравнении (21.7). При этом мы получим одно уравнение, но в частных производных:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_i,\frac{\partial S}{\partial q_i},t\right)=0\,. \tag{21.11}$$

Это уравнение в частных производных первого порядка (т.е. содержащее частные производные только первого порядка) называется ***уравнением Гамильтона-Якоби***.

Приведем простой пример уравнения Гамильтона-Якоби для одномерного движения материальной точки квадратичном потенциале (линейный осциллятор) $U(x) = kx^2/2$. В этом случае гамильтониан частицы очень простой:

$$H = p^2/2m + kx^2/2, \tag{21.12}$$

и решение задачи в лагранжевом подходе очевидно: $x = a\sin(\omega_0(t - t_0))$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и $a = \sqrt{2E/k}$, E – полная энергия.

В подходе Гамильтона-Якоби соответствующее уравнение для действия имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} = 0. \tag{21.13}$$

В этом примере видна сложность такого подхода. Во-первых, надо решить это уравнение в частных производных и найти $S = S(x,t)$, а во-вторых, по найденной функции $S(x,t)$ найти искомую зависимость $x = x(t)$. Поскольку система консервативна, то из (21.7) следует, что $\partial S/\partial t = -E = const$, и поэтому решение можно представить в виде $S = -Et + S_0(x)$, где функция $S_0(x)$ удовлеьворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dS_0}{dt} = \sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}, \tag{21.14}$$

и, следовательно,

$$S_0 = \sqrt{2m}\int\sqrt{E - kx^2/2}\,dx = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}x\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}} + \sqrt{\frac{m}{k}}E\arcsin\frac{x\sqrt{k}}{\sqrt{2E}}. \tag{21.15}$$

Окончательное выражение для действия имеет вид:

$$S(x,t) = \frac{\sqrt{U(x)(E - U)}}{\omega_0} + \frac{E}{\omega_0}\arcsin\sqrt{\frac{U}{E}} - Et. \tag{21.16}$$

Вопрос: как из этого выражения получить известный нам тривиальный ответ $x = \sqrt{2E/k}\sin(\omega_0(t - t_0))$? Оказывается, что надо продифференцировать это выражение по параметру E и приравнять произвольной константе t_0. Действительно, после дифференцирования мы получим $(1/\omega_0)\arcsin(x/a) - t = t_0$. Видно, что проблема проще решается в лагранжевом или гамильтоновом подходах, но иногда только подход Гамильтона-Якоби позволяет решить задачу. Почему мы должны были проделать указанные операции? Способы решения этой задачи мы обсудим через 2 лекции, поскольку для этого нам потребуется сделать еще несколько шагов, связанных с так называемыми ***каноническими преобразованиями.***